ВОПРОСЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Выпуск 3 Серия 1972

ТЕХНИКА ПРОВОДНОЙ СВЯЗИ

УДК 621.318.5.019.3

С. Л. ХАЙЦЕР, Я. А. ШНАЙДЕР

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СУММАРНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПИ КОНТАКТОВ

Методы расчета сопротивления последовательно соединенных контактов рассматриваются для двух случаев, когда функция распределения сопротивления одиночных контактов известна и неизвестна; причем в первом случае известны аналитический вид и параметры распределения, во втором — его гистограмма.

Развитие систем автоматического регулирования, сложных коммутационных и счетно-решающих устройств привело к необходимости создания электрических схем, имеющих цепи с последовательно соединенными электрическими контактами, количество которых в одной цепи может быть от одного—двух до нескольких десятков.

Сопротивление цепи маломощных электрических контактов является случайной величиной, вид функции распределения которой может значительно изменяться для различных нагрузок и контактных материалов. В отдельных случаях для контактов, нагруженных током более 1 *а*, распределение сопротивлений контактных цепей достаточно хорошо описывается нормальным законом. Для электромагнитных реле РЭС9, РЭС10, РЭС22 и некоторых других распределение сопротивлений контактов приближенно может быть описано логарифмически нормальным распределением. Иногда для малонагруженных электрических контактов используется гамма-распределение, но для многих типов реле найти функцию распределения, дающую приемлимую для практических целей точность, вообще не удается. Именно поэтому для некоторых контактных устройств в технической документации приводится экспериментальное распределение сопротивлений контактных цепей в виде графика накопленных частот, полученного при измерении выборки достаточно большего объема. Чаще всего последовательная цепь электрических контактов состоит из контактов однотипных реле. В некоторых случаях контакты различных реле последовательной цепи (ток для всех контактов одинаков) могут иметь одинаковое распределение.

В данной работе рассматриваются методы расчета сопротивления цепи последовательно соединенных контактов, имеющих одинаковое рас-

пределение сопротивлений, т. е. принадлежащих к одной генеральной совокупности. Задача состоит в определении функции распределения $F_n(R)$ суммы n случайных величин сопротивлений контактных цепей r_m:

$$F_n(R) = P\left(\sum_{m=1}^{n} r_m < R\right). \tag{1}$$

Общая теория суммирования случайных величин, основанная на использовании предельных теорем, в данном случае непригодна, так как она рассматривает предельное поведение суммы n слагаемых при $n \to \infty$.

В дальнейшем для удобства расчетов вместо величины r_m введем нормированную функцию

$$X_m = \frac{r_m - n\overline{r}}{S\sqrt{n}}, \tag{2}$$

где $\overline{r}$ и S — среднее значение и среднеквадратичное отклонение сопротивления одиночного контакта.

Оценкой сходимости функции распределения $F(X)$ к нормальному закону является отношение [1]

$$\frac{1 - F(X)}{1 - \Phi(X)}, \tag{3}$$

где $\Phi(X)$ — нормированная функция Лапласа.

Это отношение отличается от единицы на величину, имеющую порядок $\frac{x}{\sqrt{n}}$ [1]. Отсюда видно, что при малых n контактах в последовательной цепи методы суммирования, основанные на предельных теоремах, дают большую погрешность.

В зависимости от того, известно ли распределение сопротивлений отдельной контактной цепи и его вид, могут использоваться различные методы расчета суммарного распределения ограниченного числа последовательно соединенных контактов. Рассмотрим случаи, когда распределение переходного сопротивления отдельного контакта $F(R)$ известно. В этом случае нахождение функции распределения суммы сводится к вычислению последовательной свертки функции:

$$F_2(\overline{R}) = \int_0^\infty F_1(R - r)\, F_1'(r)\, dr,$$

$$F_3(R) = \int_0^\infty F_2(R - r)\, F_2'(r)\, dr,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n(R) = \int_0^\infty F_{n-1}(R - r)\, F_{n-1}'(r)\, dr,$$

где $F_2(R)$, $F_3(R), \ldots, F_n(R)$ — функции распределения суммы сопротивлений двух, трех и т. д. контактов.

Вычисление свертки функции является трудоемкой операцией; причем для ряда случаев вычислить в общем виде ее невозможно, поэтому приходится прибегать к численному интегрированию.

В некоторых случаях вычисление функции распределения суммы случайных величин облегчается благодаря использованию характеристических функций (при суммировании случайных величин их характери-

стические функции перемножаются). Характеристическая функция вычисляется по формуле

$$\varphi(t, \Theta) = \int_0^\infty e^{itr}\, dF(r, \Theta), \tag{5}$$

где $i = \sqrt{-1}$;

Θ — параметр функции исходного распределения.

Характеристическая функция распределения суммы случайных величин будет равна

$$\Psi(t, \Theta) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t, \Theta). \tag{6}$$

Путем обратного преобразования Фурье функции $\psi(t, \Theta)$ можно найти функцию распределения $F_n(R)$ для сопротивления n последовательно соединенных контактов.

Для ряда функций распределения формула (6) может быть представлена в виде

$$\Psi(t, \Theta) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t, \Theta) = \varphi(t, n\,\Theta). \tag{7}$$

Если для характеристической функции суммы выполняется равенство (7), то распределение такой суммарной величины называется безгранично-делимым.

Как пример проверки, является ли распределение безгранично-делимым, рассмотрим гамма-распределение. Функция гамма-распределение случайной величины имеет вид

$$F(R) = \int_0^R \frac{e^{-\lambda r}\, \lambda^p\, r^{p-1}\, dr}{\Gamma(p)}, \tag{8}$$

где $\Gamma(p)$ — полная гамма-функция.

Найдем характеристическую функцию гамма-распределения:

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda r}\, e^{itr}\, \lambda^p\, r^{p-1}\, dr}{\Gamma(p)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^p. \tag{9}$$

Характеристическая функция суммы вычисляется по формуле (6)

$$\Psi(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{np}. \tag{10}$$

$\psi(t)$ — есть характеристическая функция суммарного гамма-распределения с параметрами λ и np.

Из сравнения выражений (9) и (10) видно, что гамма-распределение удовлетворяет условию (7) и, следовательно, является безгранично-делимым. Аналогично можно показать, что к безгранично-делимым относится нормальное и биномиальное распределения, а также распределение Пуассона.

Как видно из формулы (7), для безгранично-делимых распределений функция распределения суммы n сопротивлений имеет тот же вид, что и распределение сопротивления одиночного контакта. При этом первый и второй центральные моменты увеличиваются в n раз.

Для описания распределения сопротивлений одиночных контактов электромагнитных реле широко используется логарифмически-нормаль-

ное распределение. Функция логарифмически-нормального распределения случайной величины r имеет вид

$$F(R) = \int_0^R \frac{ce^{-\frac{1}{2}\frac{(\lg r - a)^2}{\sigma^2}} dr}{\sqrt{2\pi}\,\sigma r}, \tag{11}$$

где

$$a = M \lg r; \tag{11а}$$

$$\sigma^2 = D \lg r; \tag{11б}$$

$$c = 0{,}43.$$

В общем случае оно не относится к классу безгранично-делимых распределений [2], поэтому нахождение суммарного распределения для последовательной цепи из n контактов, сопротивление которых имеет логарифмически-нормальное распределение, затруднительно.

Воспользуемся тем, что логарифмически-нормальное распределение обычно с достаточной для практических целей точностью можно заменить гамма-распределением, которое является безгранично-делимым. Оценки параметров λ и p гамма-распределения можно получить, используя метод моментов:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\overline{r}}{S^2}, \tag{12}$$

$$\tilde{p} = \frac{\overline{r}^2}{S^2}. \tag{13}$$

Выразим параметры гамма-распределения через параметры логарифмически-нормального распределения. Известно, что k-й момент случайной величины, имеющей логарифмически-нормальное распределение, находится по формуле

$$Mr^k = e^{\frac{ka}{c} + \frac{k^2\sigma^2}{2c^2}}. \tag{14}$$

Откуда математическое ожидание и дисперсия случайной величины будут равны

$$Mr = e^{\frac{a}{c} + \frac{\sigma^2}{2c^2}}, \tag{15}$$

$$Dr = e^{\frac{2a}{c} + \frac{2\sigma^2}{c^2}} - e^{\frac{2a}{c} + \frac{\sigma^2}{c^2}} = e^{\frac{2a}{c} + \frac{\sigma^2}{c^2}}\left(e^{\frac{\sigma^2}{c^2}} - 1\right). \tag{16}$$

Заменив параметры a и σ их оценками

$$\overline{\lg r} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \lg r_j$$

и

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} (\lg r_j - \overline{\lg r})^2$$

(здесь N — количество контактов, по которому получены оценки параметров) и подставив полученные выражения выборочных моментов ло-

гарифмически-нормального распределения в формулах (12) и (13), получим оценки параметров гамма-распределения:

$$\tilde{\lambda} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\overline{\lg r}}{c} + \frac{S^2}{c^2}\right)}}{e^{\frac{S^2}{c^2}} - 1}, \tag{17}$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{e^{\frac{S^2}{c^2}} - 1}. \tag{18}$$

Воспользовавшись формулой (10), определим оценки параметров гамма-распределения суммарного сопротивления последовательной цепи из n контактов:

$$\tilde{\lambda}_n = \tilde{\lambda} \text{ и } \tilde{p}_n = n\tilde{p}.$$

Следовательно, вероятность того, что сопротивление последовательной цепи из n контактов будет меньше, чем R, равна

$$F_n(R) = P\left(\sum_{m=1}^{n} r_m \leqslant R\right) = \int_0^R \frac{e^{-\lambda r}\, \lambda^{np}\, r^{np-1}\, dr}{\Gamma(np)}. \tag{19}$$

Для вычисления $F_n(R)$ можно воспользоваться таблицами неполной гамма-функции [3].

Рассмотрим применение предложенного метода расчета для последовательной цепи контактов реле, имеющих распределение сопротивлений, достаточно хорошо аппроксимируемое логарифмически-нормальным законом с параметрами для контактов реле РЭС10 из ПлИ10 $\overline{\lg r} = 2{,}5$, $S = 0{,}4$ и для контактов из Ср 99,9 реле РЭС32 $\overline{\lg r} = 2$, $S = 0{,}3$.

Из выражений (17) и (18) получаем для ПлИ10 $\tilde{\lambda} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ *мом*$^{-1}$ и $\tilde{p} = 0{,}13$ и для Зл 999,9 $\tilde{\lambda} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ *мом*$^{-1}$ и $\tilde{p} = 0{,}6$.

Для величин $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{p}$ с помощью таблицы неполной гамма-функции определяется функция распределения $F(R) = P(\Sigma r_m < R)$, которая приведена на рисунке для одного контакта и цепи из двух, четырех, восьми и 12 контактов.

Если распределение сопротивлений цепи одиночного контакта неизвестно и имеется только экспериментальная кривая накопленных частот величин сопротивлений, то задача нахождения функции

$$P\left(\sum_{m=1}^{n} r_m \leqslant R\right) = F_n(R)$$

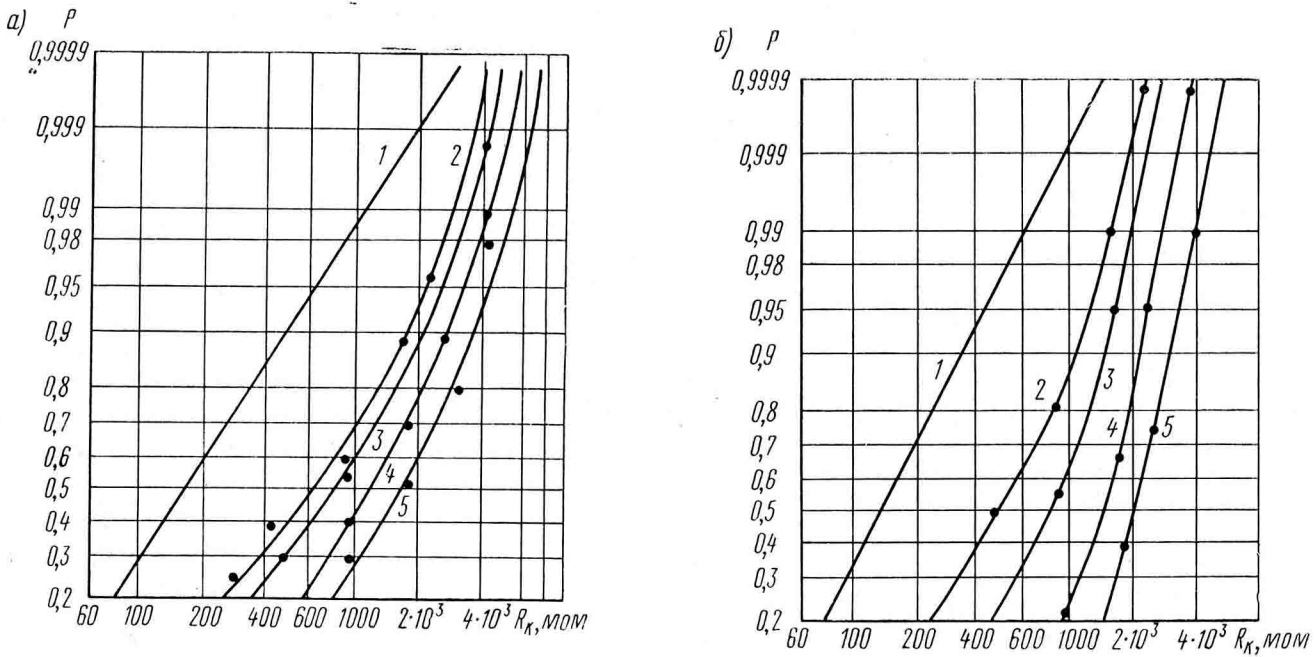
может решаться последовательным суммированием вероятностей отдельных интервалов величины r (метод перебора) [4] или использованием вероятностных неравенств.

Последовательное суммирование вероятностей производится по формуле

$$P\left(\sum_{m=1}^{n} r_m = R\right) = \sum_r P(R - r)\, P_{n-1}(r), \tag{20}$$

где $P(r)$ — вероятность нахождения величины r в данном интервале.

При использовании формулы (20) точность зависит от числа интервалов, на которое разбито исходное распределение, но с увеличением



Распределение суммарного переходного сопротивления цепи, состоящей из n последовательно соединенных контактов:

а — реле РЭС10 (материал—ПлИ1[illegible]); *б* — РЭС32 (материал — ПлИ10).

Кривые *1* — *5* — соответственно при $n = 1; 2; 3; 4; 5$.

числа интервалов резко возрастает трудоемкость расчетов. Поэтому метод перебора может эффективно использоваться при расчете на ЭВМ. В отдельных случаях, когда имеет место ярко выраженное двухвершинное распределение, суммирование может вестись даже по двум интервалам [5]. В качестве примера использования метода перебора рассмотрим последовательное соединение двух одинаковых контактов. Интервалы для исходного распределения сопротивлений r и соответствующие им частости $P(r)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

r, *мом*	0,1	0,1÷0,2	0,2÷0,3	0,3÷0,4	0,5÷5
$P(r)$	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1

Применение метода перебора для двух контактов показано в табл. 2. Из таблицы можно определить вероятность того, что суммарное сопротивление двух контактов будет больше или равно R. Например, если $R=0{,}7$, то $F\{r_{n=2}\geqslant 0{,}7\}=0{,}16$. Повторяя процедуру расчетов, можно определить распределение суммарного сопротивления любого количества последовательно-соединенных контактов.

Если в последовательной цепи более 20 контактов и исходное распределение задано экспериментальными данными, причем закон распределения не известен, вместо трудоемкого метода перебора можно использовать вероятностные неравенства типа неравенства Чебышева. В этих случаях можно получить верхнюю оценку для вероятности

$$P\Big(\sum_{m=1}^{n} r_m < R\Big).$$

Одним из таких неравенств является неравенство Бернштейна [6].

Для сопротивления последовательной цепи однородных контактов, имеющих одинаковые математические ожидания M и дисперсия σ, неравенство Бернштейна имеет вид

$$P\Big\{\sum_{m=1}^{n} r_m - nM > 2t\sqrt{n\sigma^2}\Big\} < e^{-t^2}. \qquad (21)$$

Это неравенство справедливо только в том случае, если выполняется условие ограниченности всех моментов, т. е. существует такая постоянная H, чтобы выполнялось условие

$$Mr^k \leqslant \frac{k!\,H^{k-2}\,\sigma^2}{2!}.$$

Кроме того, t из неравенства (21) должно удовлетворять условию

$$0 < t < \frac{\sqrt{n}\,\sigma}{2H}.$$

Так как r — ограниченная величина, то можно принять [6]

$$H = \frac{r_{\max} - M}{3},$$

где $r_{\max}$ — максимальное значение сопротивления одиночного контакта, которое для данных условий имеет реальную вероятность, например 0,99.

Таблица 2

Сопротивление r, *ом*			Частотность $P(r)$		$P_1 \cdot P_2$	Вероятность суммы $r_{n=2}$ и $P(r_{n=2})$
Двух контактов $r_{n=2}$	Первого контакта r_1	Второго контакта r_2	$P(r_1)$	$P(r_2)$		
2	1	1	0,3	0,3	0,09	0,09
3	1	2	0,3	0,4	0,12	0,24
	2	1	0,4	0,3	0,12	
4	1	3	0,3	0,1	0,03	0,22
	2	2	0,4	0,4	0,16	
	3	1	0,1	0,3	0,03	
5	1	4	0,3	0,1	0,03	0,14
	2	3	0,4	0,1	0,04	
	3	2	0,1	0,4	0,04	
	4	1	0,1	0,3	0,03	
6	1	5	0,3	0,1	0,03	0,15
	2	4	0,4	0,1	0,04	
	3	3	0,1	0,1	0,01	
	4	2	0,1	0,4	0,04	
	5	1	0,1	0,3	0,03	
7	2	5	0,4	0,1	0,04	0,10
	3	4	0,1	0,1	0,01	
	4	3	0,1	0,1	0,01	
	5	2	0,1	0,4	0,04	
8	3	5	0,1	0,1	0,01	0,03
	4	4	0,1	0,1	0,01	
	5	3	0,1	0,1	0,01	
9	4	5	0,1	0,1	0,01	0,02
	5	4	0,1	0,1	0,01	
10	5	5	0,1	0,1	0,01	0,01
	—	—	—	—	—	1,00

Приведенные методы позволяют определить функцию распределения сопротивления последовательной цепи контактов практически для всех возможных случаев задания распределения сопротивления одиночного контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. Л. Теория вероятностей. Изд. «Наука», 1968.
2. Прохоров Ю. В. О логнормальном распределении в геохимических задачах. «Теория вероятностей и ее применение». Изд. «Наука», 1965, № 1.
3. Смирнов Н. В., Большев Л. В. Таблицы математической статистики. Изд. «Наука», 1967.
4. Гостев В. И. Статистический контроль качества продукции. Изд. «Машиностроение», 1965.
5. Майхин Э. О., Хайцер С. Л. К вопросу определения цепочки последовательно соединенных контактов реле. Сигнальная информация «Поиск», сер. А, № 9, 1969, 1370.
6. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946.

Статья поступила 28 января 1972 г.